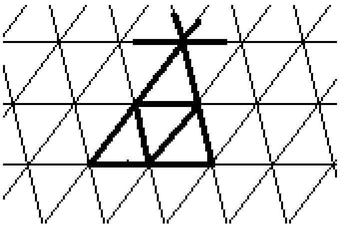
Beweisen im Mathematikunterricht

Jürgen Zumdick

1) Satzfindung, Aufstellen einer Vermutung durch

a) Anschauung (Extremwertkriterien)
b) Abstrahieren (Variation des Parameters a in f(x) = ax² mit einem Funktionenplotter)
c) Generalisieren (Ableitung von x^n)
d) Analogisieren (Wurzelgesetz für Produkt auf Quotient übertragen; Analytische Geometrie: Übergang vom R² zum R³)
e) Induktives Probieren (Produktregel der Differentialrechnung; Summenformel für die geometrische Reihe; 4 + 5 + 6 = 7 + 8 ; 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15;   16+....)
f) Entdecken von Sätzen im Dreiecksgitter (Winkelsummensatz im Dreieck, Eigenschaften des Mittendreiecks):



g) Entdecken von Sätzen durch dynamische Geometriesoftware (Winkelsumme im Dreieck, Umkreis, Inkreis, Schwerelinien im Dreieck, Binomische Formel, Umfangswinkelsatz, Satz des Pythagoras usw.)

2) Satz analysieren und merken

a) Logische Analyse (Art der Aussage: Allaussage, Existenzaussage, Wenn-Dann-Aussage, Genau-Dann-Wenn-Aussage)
b) farbige Abgrenzung von Voraussetzung und Behauptung, Formulierung des vollständigen Satzes im Anschluss an den Beweis)
c) Klären des Umfeldes (Sätze mit gleichen oder ähnlichen Voraussetzungen bzw. Behauptungen, Sätze des gleichen Problembereichs, Umkehrung, Verallgemeinerung, Spezialfall, Definitionen)
d) Exaktifizieren (Klärung von Voraussetzungen)
e) Übersetzung in eine umgangssprachliche Form (minus*minus), ikonische Form (Satz des Pythagoras)
f) Gilt die Umkehrung?

3) Einsicht in Beweisnotwendigkeit

a) Vorsicht bei vermeintlich einsichtigen Situationen:

1) f differenzierbar in $U(x_0)$, $f'(x_0)>0 \Rightarrow$ f in $U(x_0)$ monoton steigend;

Gegenbeispiel: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + \frac{x}{2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $x_0=0$

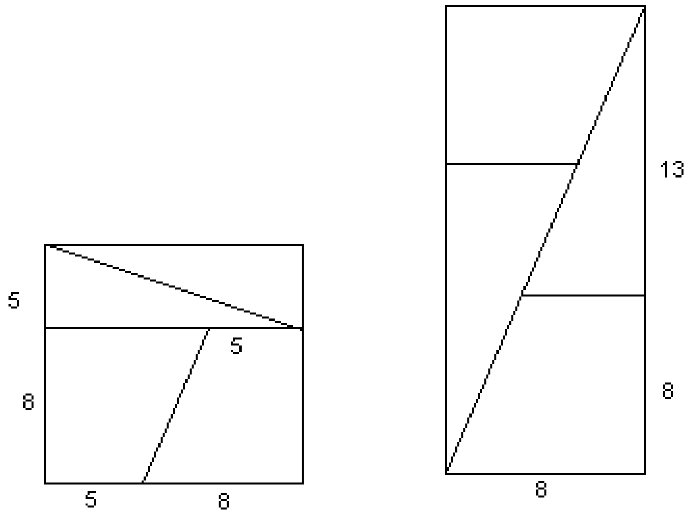
$f'(0) = \frac{1}{2}$ (mit Hilfe des Differenzenquotienten an der Stelle 0 zu beweisen)

$$f'\left(\frac{1}{n\cdot\pi}\right) = \begin{cases} -0{,}5 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 1{,}5 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

In jeder Umgebung von 0 gibt es eine Änderung des Monotonieverhaltens.
Es gilt hier nur der lokale Monotoniesatz: Es gibt eine Umgebung von 0, in welcher links von 0 alle Funktionswerte kleiner sind als recht von 0.

2) Notwendigkeit des Vorzeichenwechselkriteriums für Extremstellen (Paper Extremwertkriterien)

b) Vorsicht, es könnte eine optische Täuschung vorliegen:



Ein Quadrat (linke Figur) mit der Kantenlänge 13 LE läßt sich in vier Einzelstücke zerschneiden. Die vier Einzelstücke werden nun zu einem Rechteck (rechte Figur) zusammengelegt. Das Quadrat hat den Flächeninhalt 169 FE, das Rechteck jedoch nur 168 FE. Wo ist die eine FE geblieben?

c) Vorsicht bei Verallgemeinerungen:

1) $n^2 - n + 41$ ist eine Primzahl (gilt nur für $1 \leq n \leq 40$)
2) 31; 331; 3331; ...; 33333331 sind Primzahlen; jedoch: $333333331 = 17 \cdot 19607843$
3) Weitere Beispiele: Heuristik.pdf

d) Vorsicht bei Trugschlüssen (Versteckte Division durch 0, keine Äquivalenzumformung)

Vorstehendes trägt nur bedingt, wenn keine Grundhaltung (wie etwa: Ich möchte wissen, warum dies oder jenes richtig ist) erzeugt wird.

4) Beweisen

a) Verzicht auf einen Beweis, wenn

- der Satz völlig einsichtig ist,
- der formale Aufwand den Ertrag nicht rechtfertigt,
- der Beweis den Rahmen des Unterrichts sprengen würde (zu hoher Anspruch, fehlende Beweismittel, zu hoher Zeitbedarf),
- ein analoger Beweis bereits geführt wurde,
- keine neuen Einsichten vermittelt.

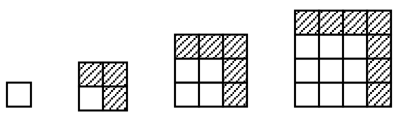
b) Begründung durch Plausibilitätsbetrachtung (Extremwertkriterien)

c) Visuelles Beweisen:

http://www.mathe-werkstatt.de
http://home.t-online.de/home/beckmannlemgo
http://www.fonline.de/rs-ebs
http://home.t-online.de/home/arndt.bruenner/mathe

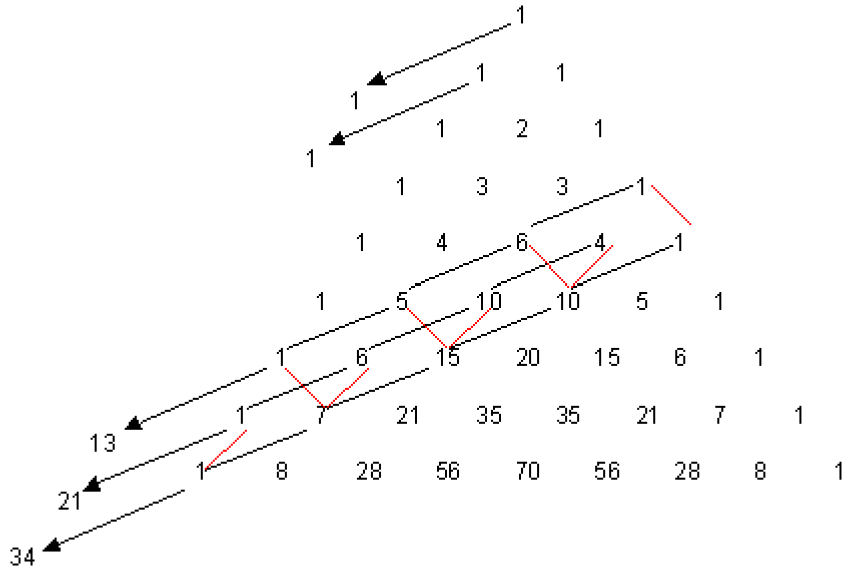
Weitere Beispiele:

1) Summe ungerader natürlicher Zahlen:



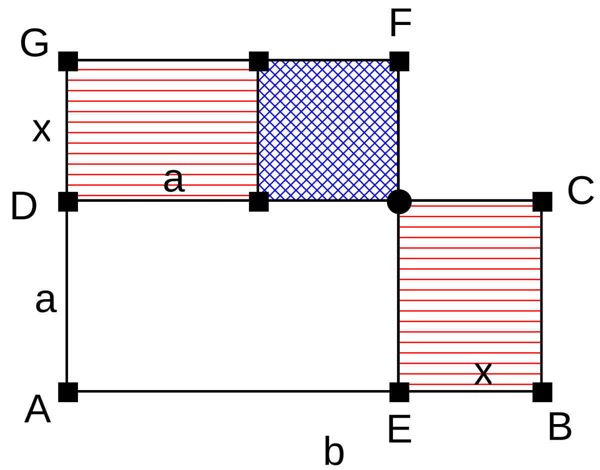
1 1+3 1+3+5 1+3+5+7

2) Die (gekennzeichneten) Diagonalsummen im Pascalschen Dreieck ergeben die Fibonacci-Zahlen. Visueller Beweis (unter Ausnutzung des Bildungsgesetzes des Pascalschen Dreiecks:



$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

3) Unter allen Vierecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt:



Das Rechteck ABCD mit den Seitenlängen a und b (a < b) wird in ein umfangsgleiches Quadrat mit den Seitenlängen a+x und b-x verwandelt (also a+x = b-x). Der Flächeninhalt dieses Quadrats wächst um den Flächeninhalt des karierten Vierecks (welches im Übrigen auch ein Quadrat ist).

d) Beweisideen suchen

1) Analogiebetrachtung: Grenzwertsatz Summe/Differenz, Hesse-Form für Geraden/Ebenen
2) Rückwärtsarbeiten: 6l mit einem 9l und 4l Eimer abfüllen
3) Vorwärtsarbeiten: Wenn in einem Viereck die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und sich gegenseitig halbieren, so ist das Viereck eine Raute
4) Kombination von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten
   Beispiel: Produktregel der Differentialrechnung

$$\left(g(x)\cdot k(x)\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\cdot k(x+h) - g/x)\cdot k(x)}{h} \quad (1)$$

$$g'(x)\cdot k(x) + g(x)\cdot k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot k(x) + g(x)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h} \quad (2)$$

Da weiteres Umformen von (1) in der Regel nicht von Erfolg gekrönt sein wird, wird die Methode des Rückwärtsarbeitens angewandt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot k(x)+g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big(g(x+h)-g(x)\big)\cdot k(x)+g(x)\cdot\big(k(x+h)-k(x)\big)}{h}$$

Das Auflösen der Klammern liefert nicht den erhofften Ausdruck (1). Stünde jedoch im vorstehenden Ausdruck an der Stelle des ersten k(x) der Term k(x+h), so erhielte man den erhofften Ausdruck (1). Dies ist jedoch leicht zu erreichen, da im Ausdruck (2) k(x) hinterm dem ersten Bruch wegen der Stetigkeit durch $\lim\limits_{h\to 0}k(x+h)$ ersetzt werden kann.

5) Spezielle heuristische Strategien
   - Fallunterscheidung:
     - Hauptsatz der Infinitesimalrechnung (f > 0,f < 0)
     - Umfangswinkelsatz mit Hilfe der Winkelsumme im Dreieck (verschiedene Lagen der Dreiecke – mit Mittelpunktswinkel und Umfangswinkel – zueinander)
   - Sonderfälle:
     - $\sqrt{p}$ ist irrational, falls p prim (Beweis für p = 2 reicht ggf., weil die speziellen Eigenschaften von 2 ohne Bedeutung sind und jede Folgerung bzw. Umformung verallgemeinerungsfähig ist). Auf welche p kann der Satz verallgemeinert werden?
     - Erweiterungsregel für Brüche (Vervierfacht man die Unterteilung, so muss man auch viermal so viel Teile nehmen)
   - handlungsorientierte Ansätze:
     - Zerlegungsbeweis zum Satz des Pythagoras
     - Irrationalität von $\sqrt{2}$:

Zeige durch Ausfüllen der folgenden Endzifferntabelle, dass $\sqrt{2}$ nicht als gekürzter Bruch darstellbar ist ($2m^2 = n^2$ und ggT(n, m) = 1 führt zu einem Widerspruch)

n	m	n^2	m^2	$2m^2$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

Nach dem Ausfüllen sieht man, dass ($2m^2 = n^2$ nur gelten kann, wenn n und m die Endziffern 0 oder 5 haben. Damit ergibt sich ein Widerspruch zu ggT(n, m) = 1.

   - Visuelle Beweise ($\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$ - s.o.)
   - Ausnutzen von Parkettmustern

6) Beweisen mit Hilfe dynamischer Geometriesoftware

e) Beweisdarstellung: formal, halbformal, umgangssprachlich

f) Beweisanalyse:

- an welcher Stelle werden welche Voraussetzungen benutzt,
- fließen stillschweigend zusätzliche Annahmen ein,
- gibt es Alternativen/Modifikationen?

g) Kontrolle des Beweisverständnisses:

1) Wiedergabe des Beweises in eigenen Worten

2) Erklärung des Beweises an einem Spezialfall
3) Ausfüllen von Beweislücken
4) Erkennen von Beweislücken
5) Erkennen von (eingebauten) Fehlern (Paper: Beweisfehler.pdf)
6) „Beweisidee“ herausarbeiten

h) Für die Sekundarstufe II: Klassifizierung von Beweisarten (direkt, indirekt, vollständige Induktion)

Beispiel für einen indirekten Beweis:
Es gibt unendlich viele Primzahlen
Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1..p_n$. Sei $k = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da k lt. Annahme keine Primzahl ist, gibt es ein p_i, welches k teilt. Also teilt p_i auch
$k - p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_i \cdot ... \cdot p_n = 1$. Es gibt also eine Primzahl, die 1 teilt, was einen Widerspruch darstellt.