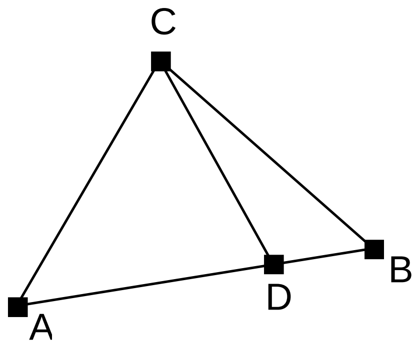
Entdecke die Fehler

Jürgen Zumdick

1. Winkelhalbierende



Voraussetzung: $\overline{AC} = \overline{BC}$
Behauptung: w(ACD) = w(DCB)

Beweis:

1. w(DAC) = w(CBD) (Basiswinkel in einem gleichschenkligen Dreieck)
2. $\overline{DC}$ ist gemeinsame Seite
3. $\overline{AC} = \overline{BC}$ (nach Voraussetzung)

Da die Dreiecke ADC und DBC in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen, sind sie kongruent.

2. Oberfläche einer Halbkugel

Zur Berechnung der Oberfläche einer Halbkugel wird deren Umfang in n gleich lange Stücke aufgeteilt (Länge eines Stücks = $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{n}$). Jeder Endpunkt eines solchen Stücks wird auf der Halbkugel mit dem „Pol" der Kugel verbunden. Es entstehen n Formen, die sich bei großem n gleichschenkligen Dreiecken annähern.

Eine Seite des Dreiecks hat die Länge $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4}$. Dann berechnet sich die Höhe h = $\pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}}$ (Satz des Pythagoras). Bildet man nun den Flächeninhalt von n Dreiecken und dann den Grenzwert, so erhält man $\lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{n} \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2 \cdot r^2}{2}$.

Um die Dreiecke an die Halbkugel anzupassen, wird als Dreieckshöhe $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4}$ gewählt. n Dreiecke haben dann den Flächeninhalt: $n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{n} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4} = \frac{\pi^2 \cdot r^2}{2}$. Dies ist dann die Oberfläche der Kugel.

Alternative:

Die Höhe ist ebenfalls eine Verbindung zum Pol und somit $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4}$ lang. n Dreiecke haben dann den Flächeninhalt: $n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{n} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4} = \frac{\pi^2 \cdot r^2}{2}$. Dies ist dann die Oberfläche der Kugel.

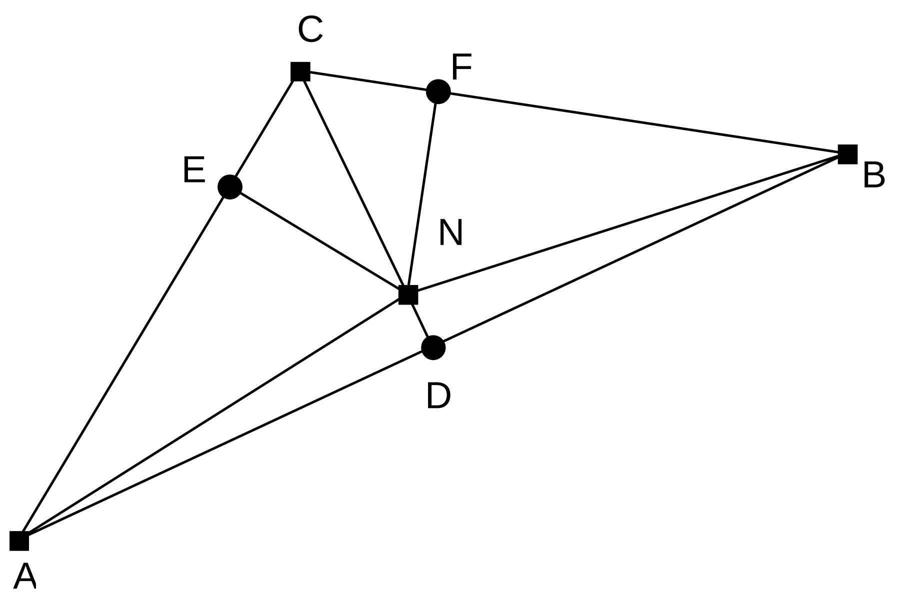
3. Alle Zahlen sind gleich

1. Es sei a ≠ b und $d = \frac{a+b}{2}$
   Es folgt d = 2d – a und 2d – b = a
   Multipliziert man die beiden Seiten der Gleichungen, so erhält man:
   $2db - b^2 = 2da - a^2$
   was äquivalent ist zu
   $d^2 - 2db + b^2 = d^2 - 2da + a^2$
   bzw. $(d - b)^2 = (d - a)^2$.
   Es folgt: d – b = d – a.
   Also a = b, womit bewiesen ist, dass alle Zahlen gleich sind.

2. Es sei a > b und a = b + c.
   Multipliziert man die Gleichung mit a – b, so erhält man:
   $a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$, was äquivalent ist zu:
   $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$ und zu
   a(a – b – c) = b(a – b – c) und zu
   a = b, womit ebenfalls bewiesen ist, dass alle Zahlen gleich sind.

4. Alle Dreiecke sind gleichschenklig

ABC sei ein beliebiges Dreieck.



Die Mittelsenkrechte von AB schneide die Winkelhalbierende des Winkels bei C im Punkte N. Von N seien die Lote auf die Dreiecksseiten gefällt.

1. AD = BD (Mittelsenkrechte)
2. ND = ND
3. Winkel (NDA) = Winkel(BDN) = 90°

Nach dem Kongruenzsatz sws sind die Dreiecke ADN und DBN kongruent. Also folgt AN = BN.

1. AN = BN
2. CN = CN
3. Winkel (ECN) = Winkel(NCF) (Winkelhalbierende)

Nach Kongruenzsatz ssw_g sind die Dreiecke ENC und NBC kongruent. Also folgt EC = CF und EN = NF

1. AN = BN
2. EN = NF
4. Winkel (AEN) = Winkel(NFB) = 90°

Nach dem Kongruenzsatz ssw_g sind die Dreiecke ANE und NBF kongruent. Als folgt AE = BF. Damit ergibt sich insgesamt AC = AE + EC = BF + CF = BC. Somit ist Dreieck ABC gleichschenklig. Entsprechend lässt sich zeigen, dass AB = BC, womit bewiesen ist, dass alle Dreiecke gleichseitig sind.
Auch für den Fall, dass N außerhalb des Dreiecks liegt, lässt sich der Beweis analog führen

5. Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$A*\vec{x}=\vec{b},\quad A=\begin{pmatrix}2&1&3\\2&2&1\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&3&-4\\2&2&1&1\\1&2&3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}-I+II\\-II+III\\III-I\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-2&5\\-1&0&2&0\\-1&1&0&5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\III-II\end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-2&5\\-1&0&2&0\\0&1&-2&5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\I-III\end{matrix}\quad\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-2&5\\-1&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}I\ und\ II\ tauschen$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&2&0\\0&1&-2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Es folgt:
$-x_1 + 2x_3 = 0$
$x_2 – 2x_3 = 5$
$x_3 = \lambda$ (eine Variable ist frei wählbar)
und weiter:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda\\5+2\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$$

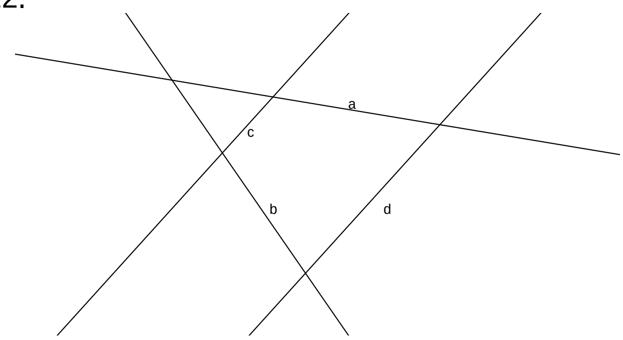
Lösung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Eine Lösung ist z.B. $\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$. Diese erfüllt aber nicht das gegebene System.

6. Volumen eines Rotationskörpers

Vorschlag zur Berechnung des Volumens V_f eines Rotationskörpers mit der Randfunktion f im Intervall $[x_0, x]$:
Berechne den Flächeninhalt A unter dem Graphen f im Intervall $[x_0, x]$. Das Rechteck mit den Seiten $a = x - x_0$ und $b = \frac{A}{x - x_0}$ hat denselben Flächeninhalt A. Lasse nun dieses Rechteck rotieren. Es ergibt sich ein Zylinder mit dem Volumen
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \left(\frac{A}{x - x_0} \right)^2 (x - x_0)$ und es gilt $V = V_f$.

7. Eine Sammlung von Schülerfehlern

1. $\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$
2. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
3. $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{x}{y}$
4. $(20\%)^2 = 400\%$
5. $4a+3b = 7ab$
6. $56{,}25 m^2 = 56 m^2\ 25 cm^2$
7. $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = 1\frac{5}{6}$
8. $a - (b - c) = a + b + c$
9. $-(-x)^4 = x^4$
10. $18 = 1001_2$; $23 = 11101_2$
11. $231_5 = 36$; $2041_5 = 51$
12.



$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$