Wendestellen und Wendestellenkriterien

Jürgen Zumdick

1. **Definition von Krümmung**

   Definition 1:
   Der Graph von f heißt linksgekrümmt (rechtsgekrümmt) im Intervall $I \subseteq D$, wenn f'(x) in I streng monoton steigend (fallend) ist.

   Als hinreichendes Kriterium ergibt sich:
   Ist f''(x) > 0 (f''(x) < 0) in I, so ist der Graph von f in I links- (rechtsgekrümmt).
   Der Satz ist nicht umkehrbar: $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$.

   Die Krümmung mit Hilfe der 2. Ableitung zu definieren (f''(x) > 0 bzw. f''(x) < 0) ist wenig sinnvoll, da dann z. B. $f(x) = x^4$ außen vorbliebe. Das Ersetzen von > durch ≥ bzw. < durch ≤ ist ebenfalls keine Lösung, da dann lineare Graphen eine Krümmung aufwiesen.

2. **Anwendungen der Krümmung**

   f stelle eine Populationsentwicklung dar
   a) Population steigt; Zuwachsraten steigen (f monoton steigend/ Linkskrümmung)
   b) Population steigt; Zuwachsraten nehmen ab (f monoton steigend/ Rechtskrümmung)
   c) Population fällt; Talfahrt beschleunigt sich (f monoton fallend/ Rechtskrümmung)
   d) Population fällt; Talfahrt wird gebremst (f monoton fallend/ Linkskrümmung)

3. **Definition von Wendestelle**

   Graphen von f, f' in ein Koordinatensystem gezeichnet führen zu folgenden Definitionen:

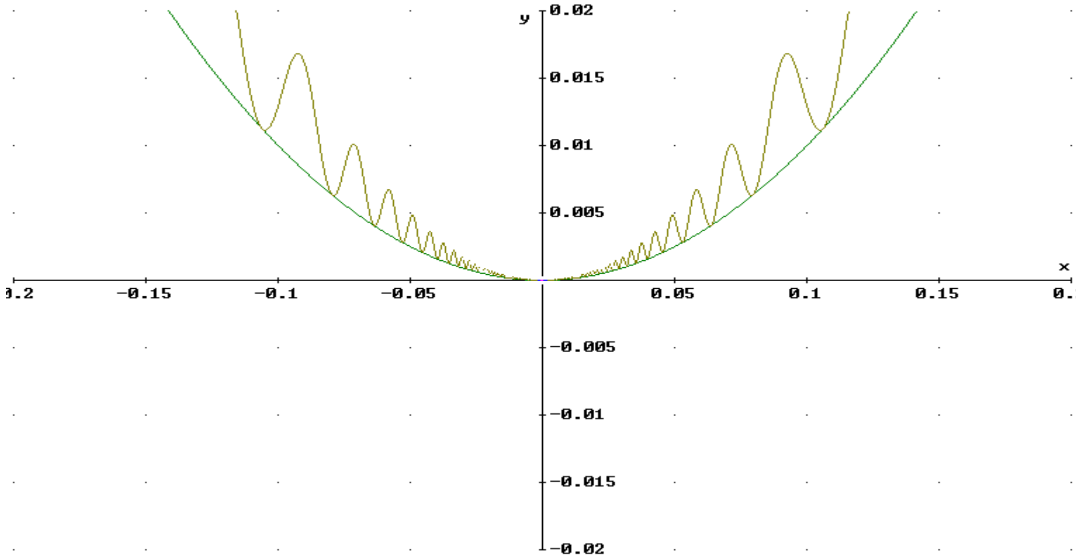
   Definition 2:
   x_0 heißt Wendestelle von f, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass der Graph von f in dieser Umgebung links von x_0 links- (rechts-) und rechts von x_0 rechtsgekrümmt (linksgekrümmt) ist.

   Definition 3:
   x_0 heißt Wendestelle von f, wenn x_0 Extremstelle von f' ist. (Extremstelle = Maximal- oder Minimalstelle).

   Die Definitionen 2 und 3 sind nicht äquivalent:
   Eine lineare Funktion f hat nach Definition 3 an jeder Stelle eine Wendestelle, da die Ableitung f' eine konstante Funktion ist und daher jede Stelle von f' lt. Definition (siehe entsprechendes Paper) Extremstelle ist.
   Im Sinne der Definition 2 liegen jedoch keine Wendestellen vor, da keine Krümmung vorliegt (f' ist konstant).

   Es existiert auch ein Gegenbeispiel für eine Funktion f, deren Ableitung in einer Umgebung ein absolutes Extremum aufweist:

$$f'(x) = \begin{cases} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)^2 + x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



Anmerkung: f existiert, da f‘ stetig und damit integrierbar ist.
Beweis der Stetigkeit an der Stelle 0:

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^2 + x^2\right) = \lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^2 + \lim_{x\to 0} x^2 = 0+0=0=f(0)$$

An allen anderen Stellen ergibt sich die Stetigkeit aus der Stetigkeit der einzelnen Funktionsterme.

f‘ hat an der Stelle 0 eine Minimalstelle. Folglich ist 0 Wendestelle der Funktion f lt. Definition 3.
0 ist jedoch keine Wendestelle von f im Sinne der Definition 2, da es keine Umgebung von 0 gibt, in welcher der Graph von f einen Krümmungswechsel aufweist. (Der Graph von f‘ weist in jeder Umgebung von 0 unendlich viele Schwankungen auf, d.h. f‘ ist also weder links noch rechts von 0 monoton).

Im Folgenden wird die Definition 2 zu Grunde gelegt. Dann folgt aus der Existenz einer Wendestelle von f die Existenz einer Extremstelle von f‘ (da f‘ links von x_0 ein anderes Monotonieverhalten als rechts von x_0 aufweist). Die Umkehrung gilt nicht, wie die beiden obigen Gegenbeispiele zeigen.

4. **Beweis der Wendestellenkriterien:**
Graphen von f, f‘ (evtl. f“) in ein Koordinatensystem gezeichnet, führen zu der Vermutung, dass bei allen Extremwertkriterien die Ordnung aller Ableitungen um 1 zu erhöhen ist.

Notwendiges Kriterium: f“(x_0) = 0. (Dies Kriterium ist unmittelbar einsichtig – vgl. auch die Überlegungen am Ende von Abschnitt 2).
Das Kriterium ist nicht hinreichend: f(x) = x^4, x_0 = 0.

Hinreichendes Kriterium:
f“(x_0) = 0 und f“ hat in U(x_0) einen Vorzeichenwechsel (VZW) $\Rightarrow$ f‘ hat bei x_0 eine Extremstelle $\Rightarrow$ f hat bei x_0 eine Wendestelle. Die letzte Folgerung ist allerdings unzulässig (siehe Überlegungen am Ende von Abschnitt 3). Es muss daher anders argumentiert werden: Da f‘ bei x_0 eine Extremstelle hat, muss f‘ wegen des Vorzeichenwechsels von f“ in U(x_0) links von x_0 ein anderes Monotonieverhalten als rechts von x_0 aufweisen. Folglich hat man bei x_0 eine Krümmungsänderung von f, d. h. x_0 ist Wendestelle.

Fazit: Hat f“ einen VZW, so hat f‘ eine Extremstelle und f eine Wendestelle. Allein aus der Existenz einer Extremstelle von f‘ kann man jedoch nicht auf die Existenz einer Wendestelle von f schließen. Man beachte, dass bei den Gegenbeispielen in Abschnitt 3 f“ auch keinen VZW hat.

Nun ergibt sich, dass dieses hinreichende Kriterium auch notwendig ist: An einer Wendestelle muss der Graph von f sein Krümmungsverhalten ändern, d.h. notwendigerweise muss f“ links von x_0 ein anderes Vorzeichen als rechts von x_0 haben.

Der Beweis des zweiten hinreichenden Kriteriums (f“(x_0) = 0 und f“‘(x_0) ≠ 0) ergibt sich analog zum entsprechenden Extremwertkriterium und den vorstehenden Überlegungen.

Dieses Kriterium ist allerdings nicht notwendig: f(x) = x^5, x_0 = 0.

f“(x_0) = 0 und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ (n ungerade) ist hinreichend, aber nicht notwendig für das Vorliegen eines Wendepunkts:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & für\ x \neq 0 \\ 0 & für\ x = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} \cdot 2 \cdot x^{-3} & für\ x \neq 0 \\ 0 & für\ x = 0 \end{cases}$$

Nachweis für f“(0) = 0:

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^{-2}} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{e^{z^2}} = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{e^{z^2} \cdot 2z} = 0$$

(unter Verwendung der Regel von de l’Hospital)

Die Funktion f‘ ist an der Stelle 0 stetig und somit integrierbar. Da f“(x) < 0 für x < 0 und f“(0) = 0 und f“(x) > 0 für x> 0, hat f an der Stelle 0 einen Wendepunkt. Alle Ableitungen von f‘ haben an der Stelle 0 den Wert 0 (zum Beweis siehe das Paper zu den Extremwertkriterien). Das Kriterium f“(x_0) = 0 und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ist folglich nicht erfüllt.

Übersicht über die Wendestellenkriterien		
Kriterium	**notwendig**	**hinreichend**
f“(x_0) = 0	ja	nein
f“(x_0) = 0 und VZW an der Stelle x_0	ja	ja
f“(x_0) = 0 und f“‘(x_0) ≠ 0	nein	ja
f“(x_0) = 0 und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ (n ungerade)	nein	ja

5. Wendestellen bei Funktionen, die nicht zweimal differenzierbar sind

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & für\ x \leq 0 \\ x^2 & für\ x > 0 \end{cases}$$ ist an der Stelle 0 nur einmal differenzierbar. Es liegt eine Wendestelle lt. Definition 2 und 3 vor.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & für\ x \leq 0 \\ x^2 + x & für\ x > 0 \end{cases}$$ ist an der Stelle 0 stetig, aber nicht differenzierbar.

Sollte man Stellen, an denen f nicht differenzierbar ist, als Wendestellen ausschließen? Dann müsste die Differenzierbarkeit von f an diesen Stellen gefordert werden.