

Nachbarzahlen beim Lotto

Jürgen Zumdick

1. Keine Nachbarn

Es wird folgendes Modell herangezogen: Die 6 zu ziehenden Zahlen entsprechen 6 nicht unterscheidbaren Kugeln, die auf 49 Plätze verteilt werden sollen. Betrachtet man die zu wählenden Plätze in aufsteigender Nummerierung a, b, c, d, e, f, so stehen die Plätze mit den Nummern a+1, b+1, c+1, d+1, e+1 nicht zur Verfügung, wenn keine Nachbarplätze belegt werden dürfen – man beachte, dass a die kleinste und f die größte Platznummer ist. Da 5 Plätze nicht zur Verfügung stehen, gibt es für die 6 zu verteilenden Kugeln nur

$49 - (6 - 1) = 44$ Plätze. Die Verteilung kann also auf $\binom{44}{6}$ Arten erfolgen.

Am Beispiel 3 aus 6 sei die Vorgehensweise demonstriert:

Zu belegende Plätze	Nicht zur Verfügung stehende Plätze
1, 3, 5	2, 4
1, 3, 6	
1, 4, 6	2, 5
2, 4, 6	3, 5

Anzahl der Plätze ohne Nachbarn: $\binom{6 - (3 - 1)}{3} = 4$

2. Genau ein Zwilling

1. Schritt

Es werden zunächst nur 5 Kugeln verteilt. Dabei werden jeweils die kleinste und die größte Platznummer festgelegt, damit es im 2. Schritt nicht zu doppelten Lösungen kommt. Analog zu 1. (keine Nachbarn) kommen 4 Plätze nicht in Betracht, wenn keine Nachbarplätze belegt werden dürfen.

2. Schritt

Von den ausgewählten 5 Plätzen wird ein Platz bestimmt, der zu einem Zwillingsplatz ergänzt wird. Damit bei diesem Verfahren kein Drillingsplatz entstehen kann, muss im ersten Schritt ein weiterer Platz frei bleiben. Es stehen also $49 - (4 + 1) = 44$ Plätze für die Verteilung der 5 Kugeln nicht zur Verfügung. Also kann die Verteilung auf $\binom{44}{5} \cdot \binom{5}{1}$ Arten

erfolgen. (Zunächst werden 5 Kugeln auf die erlaubten 44 Plätze verteilt, danach wird ein Platz ausgesucht, der zu einem Zwillingsplatz ergänzt wird.)

Im Beispiel 3 aus 6 sieht der Vorgang wie folgt aus ($6 - (1 + 1) = 4$ zur Verfügung stehende Plätze):

:

1. Schritt: Verteilung von 2 Kugeln

Zu belegende Plätze	Nicht zur Verfügung stehende Plätze
1, 4	2, 3
1, 5	
1, 6	

2, 5	3, 4
2, 6	
3, 6	4, 5

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{4}{2} = 6$

2. Schritt: Einer der belegten Plätze wird zu einem Zwillingssplatz ausgebaut:

(Man beachte, dass im 1. Schritt die kleinste und die größte Platznummer vergeben wurden.)

Belegte Plätze	1. Zwillingssplatz und weiterer Platz	2. Zwillingssplatz und weiterer Platz
1, 4	1, 2, 4	1, 3, 4
1, 5	1, 2, 5	1, 4, 5
1, 6	1, 2, 6	1, 5, 6
2, 5	2, 3, 5	2, 4, 5
2, 6	2, 3, 6	2, 5, 6
3, 6	3, 4, 6	3, 5, 6

Anzahl der Plätze mit einem Zwillingsspaar: $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 12$

3. Genau ein Drilling und ein Zwilling

Es werden zunächst drei Kugeln verteilt. Analog zu 1. kommen zwei Plätze nicht in Betracht. Von den ausgewählten drei Plätzen wird ein Platz bestimmt, der zu einem Drillingsplatz ergänzt wird. Analog zu den Überlegungen in 2. müssen zwei weitere Plätze frei bleiben. Von den restlichen zwei ausgewählten Plätzen wird einer bestimmt, der zu einem Zwillingssplatz ergänzt wird. Daher muss ein weiterer Platz frei bleiben. Also stehen auch hier insgesamt nur $49 - (2 + 2 + 1) = 44$ Plätze für die Verteilung der drei Kugeln zur Verfügung.

Es gibt somit $\binom{44}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}$ Verteilungsarten mit einem Drilling und einem Zwilling.

(Zunächst werden drei Kugeln auf die erlaubten 44 Plätze verteilt. Von den belegten drei Plätzen wird einer ausgewählt, der zu einem Drillingsplatz ergänzt wird. Von den restlichen beiden Plätzen wird dann derjenige gewählt, der zu einem Zwillingssplatz ergänzt wird.)

Das Verfahren sei zunächst am Beispiel 5 aus 9 demonstriert ($9 - (1+2+1) = 5$ zur Verfügung stehende Plätze):

1. Schritt: Verteilung von 2 Kugeln

Zu belegende Plätze	Nicht zur Verfügung stehende Plätze
1, 6	2, 3, 4, 5
1, 7	
1, 8	
1, 9	
2, 7	3, 4, 5, 6
2, 8	
2, 9	
2, 9	

3, 8	4, 5, 6, 7
3, 9	
4, 9	5, 6, 7, 8

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{5}{2} = 10$

2. Schritt: Einer der belegten Plätze wird zu einem Drillingsplatz ausgebaut, der andere zu einem Zwillingsplatz:

Belegte Plätze	1. Drillingsplatz und Zwillingsplatz	2. Drillingsplatz und Zwillingsplatz
1, 6	1, 2, 3, 5, 6	1, 2, 4, 5, 6
1, 7	1, 2, 3, 6, 7	1, 2, 5, 6, 7
1, 8	1, 2, 3, 7, 8	1, 2, 6, 7, 8
1, 9	1, 2, 3, 8, 9	1, 2, 7, 8, 9
2, 7	2, 3, 4, 6, 7	2, 3, 5, 6, 7
2, 8	2, 3, 4, 7, 8	2, 3, 6, 7, 8
2, 9	2, 3, 4, 8, 9	2, 3, 7, 8, 9
3, 8	3, 4, 5, 7, 8	3, 4, 6, 7, 8
3, 9	3, 4, 5, 8, 9	3, 4, 7, 8, 9
4, 9	4, 5, 6, 8, 9	4, 5, 7, 8, 9

Anzahl der Plätze mit einem Drilling und einem Zwilling::

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 1 = 20$$

Etwas komplizierter gestaltet sich die Auswahl im Beispiel 6 aus 9 (9 – (2 + 2 + 1) = 4 zur Verfügung stehende Plätze):

1. Schritt: Verteilung von 3 Kugeln (der mittlere Platz ist dabei als Doppelplatz zu wählen, weil die endgültige Position erst bei der nachfolgenden Wahl festgelegt werden kann):

Belegte Plätze	Nicht zur Verfügung stehende Plätze
1, 4 bzw. 5, 8	2, 3, 5 bzw. 4, 6, 7
1, 4 bzw. 5, 9	
1, 5 bzw. 6, 9	3, 4, 6 bzw. 5, 7, 8
2, 5 bzw. 6, 9	

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{4}{3} = 4$

2. Schritt: Bestimmung des Drillingsplatzes:

Hier wird zunächst der Drillingsplatz bestimmt:

Belegte Plätze	1. Drillingsplatz	2. Drillingsplatz	3. Drillingsplatz
1, 4 bzw. 5, 8	1, 2, 3	3, 4, 5 bzw. 4, 5, 6	6, 7, 8
1, 4 bzw. 5, 9	1, 2, 3	3, 4, 5 bzw. 4, 5, 6	7, 8, 9

1, 5 bzw. 6, 9	1, 2, 3	4, 5, 6 bzw. 5, 6, 7	7, 8, 9
2, 5 bzw. 6, 9	2, 3, 4	4, 5, 6 bzw. 5, 6, 7	7, 8, 9

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{1} = 12$

3. Schritt: Einer der beiden restlichen Plätze wird zu einem Zwillingsplatz ergänzt, der letzte Platz bleibt ein Einzelplatz:

Drillingsplatz	Drillingsplatz mit 1. Zwillingsplatz und Einzelplatz	Drillingsplatz mit 2. Zwillingsplatz und Einzelplatz
1, 2, 3	1, 2, 3, 5, 6, 8	1, 2, 3, 5, 7, 8
3, 4, 5 bzw. 4, 5, 6	1, 3, 4, 5, 7, 8	1, 2, 4, 5, 6, 8
6, 7, 8	1, 2, 4, 6, 7, 8	1, 3, 4, 6, 7, 8
1, 2, 3	1, 2, 3, 5, 6, 9	1, 2, 3, 5, 8, 9
3, 4, 5 bzw. 4, 5, 6	1, 3, 4, 5, 8, 9	1, 2, 4, 5, 6, 9
7, 8, 9	1, 2, 4, 7, 8, 9	1, 3, 4, 7, 8, 9
1, 2, 3	1, 2, 3, 6, 7, 9	1, 2, 3, 6, 8, 9
4, 5, 6 bzw. 5, 6, 7	1, 4, 5, 6, 8, 9	1, 2, 5, 6, 7, 9
7, 8, 9	1, 2, 5, 7, 8, 9	1, 4, 5, 7, 8, 9
2, 3, 4	2, 3, 4, 6, 7, 9	2, 3, 4, 6, 8, 9
4, 5, 6 bzw. 5, 6, 7	2, 4, 5, 6, 8, 9	2, 3, 5, 6, 7, 9
7, 8, 9	2, 3, 5, 7, 8, 9	2, 4, 5, 7, 8, 9

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot 1 = 24$

Zusammenstellung für 6 aus 49:

Keine Nachbarn	$\binom{44}{6}$	7059052
Ein Zwilling	$\binom{44}{5} \cdot \binom{5}{1}$	5430040
Zwei Zwillinge	$\binom{44}{4} \cdot \binom{4}{2}$	814506
Drei Zwillinge	$\binom{44}{3}$	13244
Ein Zwilling, ein Drilling	$\binom{44}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}$	79464
Ein Zwilling, ein Vierling	$\binom{44}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}$	1892

Ein Drilling	$\binom{44}{4} \cdot \binom{4}{1}$	543004
Zwei Drillinge	$\binom{44}{2}$	946
Ein Vierling	$\binom{44}{3} \cdot \binom{3}{1}$	39732
Ein Fünfling	$\binom{44}{2} \cdot \binom{2}{1}$	1892
Ein Sechsling	$\binom{44}{1}$	44
Alle Möglichkeiten	$\binom{49}{6}$	13983816